Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen vom Schaubild von f im Punkt $(x_0|f(x_0))$. Skizzieren Sie Ihre Lösung.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x - 1$ $\quad x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ $\quad x_0 = 2$ und $x_0 = 3$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ $\quad x_0 = 1$ und $x_0 = 2$

Lösung:

Mit Formel: $t(x) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$

$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$

Bemerkung: $P \in K_f$!

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x - 1$ $\quad f(2) = -1$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2$ $\quad f'(2) = 4$

$\Rightarrow t(x) = 4(x-2) + (-1)$

$= \underline{\underline{4x - 9}}$

$n(x) = -\frac{1}{4}(x-2) - 1$

$= \underline{\underline{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}}}$

Skizze: vgl. GeoGebra-Lösung

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ $\quad f(2) = 2$ $\quad f(3) = 1{,}5$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ $\quad f'(2) = -1$ $\quad f'(3) = -\frac{1}{4}$

$x_0 = 2$:

$\Rightarrow t(x) = -1\cdot(x-2) + 2$

$= \underline{\underline{-x + 4}}$

$n(x) = 1(x-2) + 2$

$= \underline{\underline{x}}$

$x_0 = 3$:

$t(x) = -\frac{1}{4}(x-3) + 1{,}5$

$= -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

$n(x) = 4\cdot(x-3) + 1{,}5$

$= 4x - 10{,}5$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ $\quad f(1) = -\frac{3}{4}$

$f'(x) = x^3 - 2x$ $\quad f'(1) = -1$

$t(x) = -1\cdot(x-1) - \frac{3}{4}$

$= \underline{\underline{-x + \frac{1}{4}}}$

$n(x) = 1\cdot(x-1) - \frac{3}{4}$

$= \underline{\underline{x - \frac{7}{4}}}$

$\underline{x_0 = 2}$: $\quad f(2) = 0$

$f'(2) = 4$

$t(x) = 4(x-2) + 0$

$= \underline{\underline{4x - 8}}$

$n(x) = -\frac{1}{4}(x-2) + 0$

$= \underline{\underline{-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}}$