Energie, Arbeit und Energiesatz werden im Buch ausführlich behandelt. Hier folgen einige Ergänzungen zum Impuls- und zum Drehimpulssatz.

1 Erhaltungssätze der Mechanik

1.1 Erhaltungsgrössen und Raumsymmetrien

Im Jahr 1918 brachte die deutsche Mathematikerin und Physikerin *Emmy Noether* physikalische Erhaltungsgrössen in Zusammenhang mit Symmetrien des Raums.
So folgt nach Noether der Energiesatz aus der *Homogenität der Zeit* (Wahl des Zeit-Ursprungs spielt keine Rolle), der Impulssatz aus der *Translationsinvarianz* des Raums (Wahl des Orts-Ursprungs spielt keine Rolle) und der Drehimpulssatz aus der *Drehinvarianz* des Raums (Richtung im Raum spielt keine Rolle).

1.2 Impulssatz

Der Impuls $\vec{p}$ eines geradlinig bewegten Körpers, z.B. eines Massepunkts, ist das Produkt aus dessen Masse und Geschwindigkeit (Figur 81, S. 115 und Figur 89, Mitte, S. 125 im Buch):

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad \text{Einheit}: [p] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

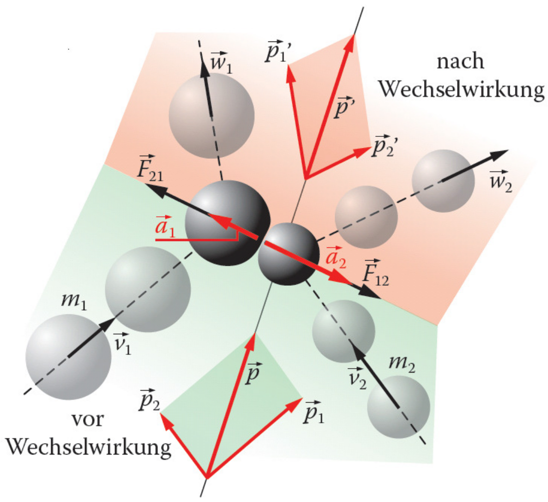
Für den (Gesamt-)Impuls gilt ein Erhaltungssatz, der Impulssatz:

Impulssatz

In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtimpuls erhalten.

„Abgeschlossenes System" bedeutet hier, dass auf die an einem Stossprozess beteiligten Körper von aussen keine Kräfte einwirken.

„Gesamtimpuls" bedeutet, dass nicht der Teil-Impuls eines einzelnen, sondern die Summe der Impulse aller an einem Stoss beteiligten Körper erhalten bleibt.



Figur 1 Stossprozess

Der Stoss zweier Körper ist ein elementarer Prozess, der sowohl im Alltag als auch in der Wissenschaft von grosser Bedeutung ist. Figur 1 zeigt den Stoss zweier unterschiedlicher Kugeln. Die vektoriellen Gesamtimpulse vor, während und nach dem Stoss sind dabei gleich gross (Impulssatz):

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \qquad \text{oder}$$
$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{w}_1 + m_2 \cdot \vec{w}_2$$

Fassen wir die beiden Körper m_1 und m_2 zu *einem einzigen Körper* zusammen, so wirken nur die inneren Kräfte $\vec{F}_{12}$ und $\vec{F}_{21}$, die sich gegenseitig aufheben, auf dieses System. Es wirkt keine Kraft $\vec{F}$ von aussen, also ist dieses System im Sinne des Impulssatzes *abgeschlossen*. Gemäss Newton'schem Bewegungsgesetz gilt:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{0} \quad oder \quad \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p} \qquad \text{(Kraftstoss)}$$

Wirkt während einer Zeit Δt eine äussere Kraft $\vec{F}$, ein so genannter *Kraftstoss,* auf das System, so ändert sein Gesamtimpuls um $\Delta \vec{p}$. Wirkt keine äussere Kraft, so verschwindet auch $\Delta \vec{p}$, der Gesamtimpuls $\vec{p}$ bleibt also erhalten, d.h. er ist konstant. Dann bewegt sich der Schwerpunkt der beiden Körper geradlinig gleichförmig ($\vec{v} = \text{konst.}$). Der Impulserhaltungssatz ist also äquivalent (gleichwertig) mit der Konstanz der Bewegung des *Schwerpunkts* eines (ausgedehnten) Körpers.

Bleibt bei einem Stoss (Figur 1) die mechanische (kinetische) Energie erhalten, so sprechen wir von einem *vollständig elastischen* Stoss, bewegen sich die Körper nach dem Stoss gemeinsam mit gleicher Geschwindigkeit weiter, so heisst der Stoss *vollständig inelastisch*. Reale Stösse spielen sich zwischen diesen beiden Extremen ab.

1.3 Drehimpulssatz

Der Drehimpuls $\vec{L}$ eines rotierenden Körpers, z.B. eines kreisenden Massepunkts, ist das (Vektor-)Produkt aus dem Kreisradius $\vec{r}$ und dem Impuls $\vec{p}$ (Figur 89 rechts, S. 125 im Buch):

Drehimpuls eines rotierenden Massepunkts

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v} = m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega} \quad \text{Einheit}: [L] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

$\omega = \frac{\text{Winkel}}{\text{Zeit}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{v}{r}$ ist die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Massepunkts.

Für den Betrag des Drehimpulses gilt $|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\varphi = m \cdot |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{p}$ bzw. $\vec{r}$ und $\vec{v}$ ist.
Der Drehimpulssatz bezieht sich auf rotierende Körper, z.B. auf ein rotierendes Velorad. Wirkt bezüglich Schwerpunkts kein äusseres Drehmoment (Figur 76, S. 110 im Buch), so verändert sich dessen Drehimpuls nicht:

Drehimpulssatz

In einem abgeschlossenen System bleibt der gesamte Drehimpuls erhalten.

Abgeschlossenes System bedeutet, dass der rotierenden Körper kein äusseres *Drehmoment* erfährt.
Der Drehimpuls ist ein *Vektor*, der normal (senkrecht) zur Ebene steht, die von den Vektoren Radius und Impuls des rotierenden Massepunkts gebildet wird.
Die Richtung des *Vektor* $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ des Drehimpulses kann so bestimmt werden, dass man der Reihe $\vec{L}$ den Daumen, $\vec{r}$ den Zeigfinger und $\vec{p}$ den Mittelfinger der gespreizten rechten Hand eines Menschen zuordnet („Rechte-Hand-Regel“).

Stehen $\vec{r}$ und $\vec{p}$ senkrecht zueinander, so können wir für den Betrag des Drehimpulses $\vec{L}$ eines rotierenden Massepunkts *m* schreiben:

$$L = r \cdot p = r \cdot m \cdot v = r \cdot m \cdot \omega \cdot r = \underbrace{m \cdot r^2}_{I} \cdot \omega = I \cdot \omega$$

ω ist die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers (Winkel pro Zeit); die neue Grösse $I = m \cdot r^2$ ist das so genannte *Trägheitsmoment* eines rotierenden Massepunkts.

Trägheitsmoment *I* eines rotierenden Massepunkts *m*

$$I = m \cdot r^2$$

Radius der Kreisbahn (Figur 89, rechts, S. 125 im Buch)

Das Trägheitsmoment eines ausgedehnten starren Körpers kann berechnet werden, indem dieser Körper in (sehr kleine) Teilkörper Δm_i zerlegt wird, die wie Massepunkte behandelt werden können. Das Gesamt-Trägheitsmoment ergibt sich dann als Summe der zugehörigen Teil-Trägheitsmomente:

Trägheitsmoment *I* eines starren rotierenden Körpers

$$I = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2$$

Das Trägheitsmoment einfacher starrer Körper kann mit dieser Definition und der Integralrechnung ermittelt werden. Für eine homogenen Kugel mit der Masse m und dem Radius r erhält man so $I_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$, für einen homogenen Vollzylinder $I_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$, falls die Drehachse durch das Kugelzentrum bzw. durch die Symmetrieachse des Zylinders verläuft.
Damit erhalten wir die allgemeine Definition des Drehimpulses eines starren Körpers, der um eine feste Achse rotiert:

Drehimpuls eines rotierenden starren Körpers

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad \text{Einheit}: [L] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

2 Beispiele zum Drehimpuls

2.1 Pirouette: Drehimpulserhaltung

Eine Person (Masse m_K) steht mit ausgestreckten Armen auf einem rotierenden Drehschemel, in jeder Hand eine schwere Hantel (Masse m) und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 (Figur 2). Dann bewegt sie beide Hanteln über ihren Kopf und *verkleinert* so deren Radius von r_1 auf r_2 und damit auch das Trägheitsmoment des ganzen rotierenden Systems (Mensch, Hanteln, Drehschemel) von I_1 auf I_2. Weil der gesamte Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten bleibt gilt:

$$L = I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 = \text{konstant}$$

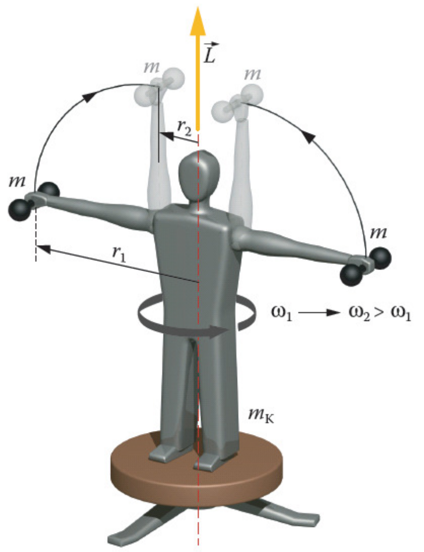
Vernachlässigen wir die Masse m_K der mit rotierenden Person, so lautet diese Gleichung:

$$L = 2 \cdot m \cdot r_1^2 \cdot \omega_1 = 2 \cdot m \cdot r_2^2 \cdot \omega_2 = \text{konstant}$$

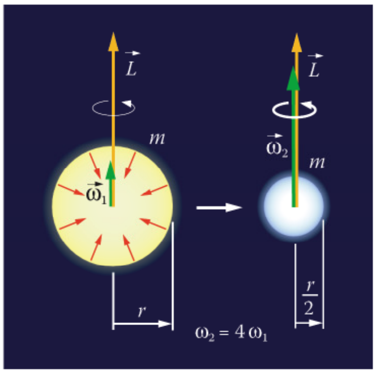
Dies ist natürlich nur dann zulässig, wenn das Trägheitsmoment dieser Person viel kleiner ist als $m \cdot r_1^2$ bzw. $m \cdot r_2^2$.
Weil das Trägheitsmoment abnimmt, muss also die Winkelgeschwindigkeit zunehmen:

$$I_2 < I_1 \;\Rightarrow\; \omega_2 > \omega_1 \quad \text{bzw.} \quad r_2 < r_1 \;\Rightarrow\; \omega_2 > \omega_1$$

Dieser Effekt wird von einer Schlittschuhläuferin ausgenützt, die zu einer Pirouette ansetzt.



Figur 2 Erhaltung des Drehimpulses



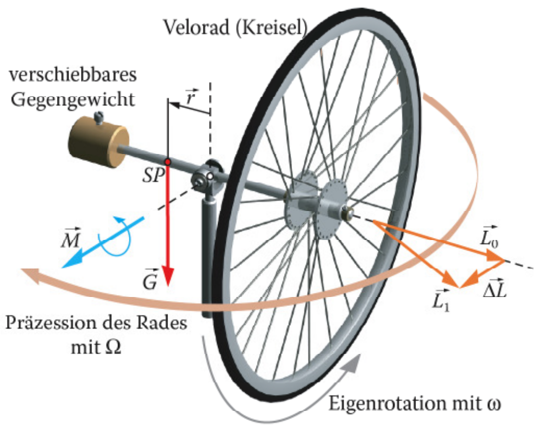
Figur 3 Kollabierender Stern

Drehimpulserhaltung im grossen Massstab kann an einem kollabierenden Stern beobachtet werden (Figur 3): Schrumpft er auf die Hälfte seines ursprünglichen Radius‘, so verkleinert sich sein Trägheitsmoment I auf den vierten Teil und seine Winkelgeschwindigkeit ω wird vervierfacht.

2.2 Der Drehimpuls bleibt nicht erhalten: Präzessierendes Velorad

Wirkt ein äusseres Drehmoment auf einen rotierenden starren Körper, so ändert sich sein Drehimpuls:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\Delta(I \cdot \omega)}{\Delta t} = I \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \sum_i \left(\Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \frac{\Delta v_i}{r_i \cdot \Delta t} \right) = \sum_i (\Delta m_i \cdot r_i \cdot a_i) = \sum_i (r_i \cdot F_i) = \sum_i M_i = M$$



Figur 4 Präzessionsbewegung eines Velorads

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist also gleich dem Gesamtdrehmoment M.
Eine anspruchsvolle Anwendung des Drehimpulses in einem *nicht-abgeschlossenen* System ist ein frei aufgehängtes, mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine horizontale Achse rotierendes Velorad. Es kann zudem um eine vertikale Achse rotieren (Winkelgeschwindigkeit Ω, Figur 4).
Durch ein verschiebbares Gegengewicht wird es vorerst im Gleichgewicht gehalten ($\vec{r} = \vec{0}$).

In diesem Fall wirkt kein äusseres Drehmoment und der Drehimpuls bleibt als Vektor konstant; das Rad rotiert somit nur um eine raumfeste horizontale, nicht aber um eine vertikale Achse, d.h. $\Omega = 0\frac{1}{\mathrm{s}}$.

Wird das Gewicht verschoben, so verläuft die Vektorsumme $\vec{G}$ der Gewichtkräfte von Velorad und Gegengewicht nicht mehr durch die vertikale Achse (Figur 4, roter Vektor, $\vec{r} \neq \vec{0}$) und erzeugt so ein äusseres Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G}$$

auf das Velorad, das seinerseits eine zeitliche Änderung $\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$ des Drehimpulses $\vec{L}$ bewirkt.

Diese Änderung $\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$ erzeugt eine eigenartige Doppelbewegung des Rads.

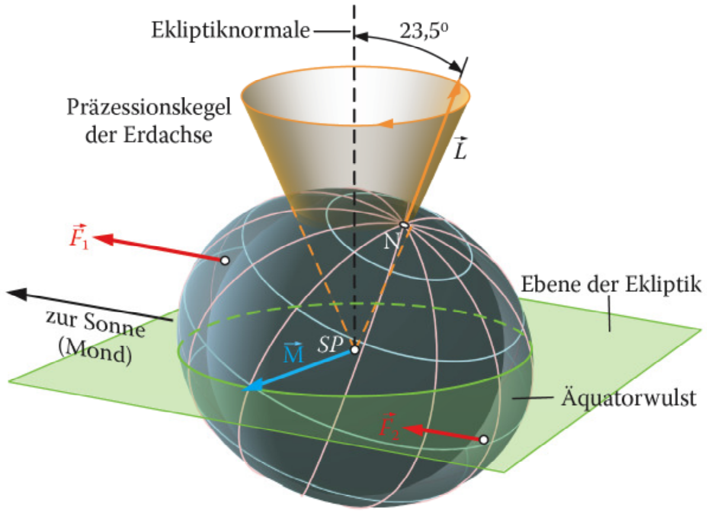
Es rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um seine eigene Achse, zudem mit einer (anderen) Winkelgeschwindigkeit Ω um die vertikale Achse. Für die Bewegung des Schwerpunkts *SP* (Figur 4) gilt:

$$\Omega = \frac{v}{r} = \frac{\Delta s}{\Delta t \cdot r} = \frac{\Delta\varphi \cdot r}{\Delta t \cdot r} = \frac{\Delta L}{L \cdot \Delta t} = \frac{M \cdot \Delta t}{L \cdot \Delta t} = \frac{G \cdot r}{I \cdot \omega}$$

Eine solche Bewegung bezeichnet man als *Präzession* oder *Kreisselung*.

Ein interessantes Beispiel ist die Präzession der Erdachse um die Normale (Senkrechte) zur Ekliptik (Bahnebene der Erde um die Sonne).

Dieser Effekt ist eine Folge der Abplattung der Erde an ihren Polen. Die „Äquatorwülste" erzeugen dabei ein Drehmoment der Erde bezüglich der Sonne (Umlaufszeit $T = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} \approx 26'000$ Jahre, Figur 5).



Figur 5 Präzession der Erdachse um die Ekliptiknormale (gestrichelte Gerade)